

Lagrange-Galerkin法の理論と実践

野津 裕史

1 はじめに

本稿では、流れ問題の強力な数値解法の1つであるLagrange-Galerkin (LG) 法の理論的および実践的な内容について紹介する。LG法とは、簡単に記すと

LG法 = 特性曲線法 + 有限要素法

である。別の呼び方がいくつかあるが、論文^[12]を尊重してLG法と呼ぶことにする。有限要素法を有限差分法で置き換えた特性曲線有限差分法なども自然に考えられるが、本稿ではLG法に焦点をあてる。

特性曲線法は物質微分項 (時間微分項 + 移流項) を離散化する方法の一つである。そのアイデアは、流体粒子の軌跡を考えて、その軌跡に沿って離散化をおこなう、物理的視点から自然な手法である。

T を正定数、 $d = 2, 3$ を空間次元、 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を有界領域、 $\Gamma \equiv \partial\Omega$ を Ω の境界、 $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ を流速とする。物質微分を

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$$

により定義する。 $X : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ を常微分方程式系 :

$$\frac{dX}{dt} = u(X, t) \quad (1)$$

の解とすると、 u の物質微分 $Du/Dt = \partial u / \partial t + (u \cdot \nabla)u$ は X を用いて常微分により記述できる :

$$\frac{Du}{Dt}(x, t) = \frac{d}{dt} u(X(t), t). \quad (2)$$

Δt を時間刻み、 $N_T \equiv \lceil T/\Delta t \rceil$ とし、 $n \in \{0, 1, \dots, N_T\}$ に対して $t^n \equiv n\Delta t$ 、 $u^n \equiv u(\cdot, t^n)$ とする。(1) および初期条件 $X(t^n) = x$ を満たすものを $X(\cdot; x, t^n)$ と書く。 $X(\cdot; x, t^n)$ は $t = t^n$ において x を通過する流体粒子の位置を表す。(2) より、時刻 $t = t^n$ ($n \geq 1$) における物質微分の近似 :

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt}(x, t^n) &= \frac{d}{dt} u(X(t; x, t^n), t) \Big|_{t=t^n} \\ &\approx \frac{u(X(t^n; x, t^n), t^n) - u(X(t^{n-1}; x, t^n), t^{n-1})}{\Delta t} \\ &\approx \frac{u^n - u^{n-1} \circ X_1(u^{n-1}, \Delta t)}{\Delta t}(x) \end{aligned} \quad (3)$$

筆者紹介



のつ ひろふみ

2000年広島大学大学院理学研究科博士課程前期修了。博士 (数理学)、九州大学、2009年。産業技術総合研究所特別研究員、明治大学先端数理科学インスティテュート研究員、早稲田大学高等研究所講師を経て、現在、同准教授。偏微分方程式の数値解析の研究に従事。

を得る。ここに $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ 、 $w : \Omega \rightarrow \Omega$ として、関数 $X_1(v, \Delta t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ は

$$X_1(v, \Delta t)(x) \equiv x - v(x)\Delta t,$$

記号 $\circ$ は関数の合成 :

$$(v \circ w)(x) \equiv v(w(x))$$

を表す。 $X_1(u^{n-1}, \Delta t)(x)$ は、 x の u に関する上流点で、 $X(t^{n-1}; x, t^n)$ の近似である。 Du/Dt の近似 (3) が特性曲線法に基づくスキームの基礎である。

一般に、特性曲線法に基づくスキームは次の利点を持つ :

- ・ 移流が支配的な問題に対してロバスト。
- ・ 得られる連立一次方程式の係数行列は対称。
- ・ CFL 条件不要。

2 LG法と安定化LG法

2.1 Navier-Stokes 方程式

非定常Navier-Stokes (NS) 方程式で支配される問題 :

$$\frac{Du}{Dt} - \nabla \cdot [2\nu D(u)] + \nabla p = f, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (4a)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (4b)$$

$$u = g, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T), \quad (4c)$$

$$u = u^0, \quad x \in \Omega, t = 0, \quad (4d)$$

を満たす流速と圧力 $(u, p) : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ を求めよ、を考える。ここに、 $f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ 、 $g : \Gamma \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ 、 $u^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ は与えられた関数、 ν は正定数、 $D(u) \equiv \{\nabla u + (\nabla u)^T\}/2$ は変形速度テンソルである。簡単のため、以下では Ω は多角形 (多面体)、 $g = 0$ とする。

2.2 NS方程式のためのLG法

$\mathcal{T}_h = \{K_\ell\}_{\ell=1}^{N_e}$ を Ω の三角形 (四面体) 要素分割とする。ここに N_e は総要素数である。 V_h, W_h をそれぞれ、流速の P1-、P2-有限要素空間とし、 Q_h を圧力の P1-有限要素空間とする。 u^0 の近似 $u_h^0 \in W_h$ が与えられたとする。問題 (4) のための P2/P1 要素による LG スキーム^[8, 12] :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{u_h^n - u_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1}, \Delta t)}{\Delta t} \cdot v_h \, dx + 2\nu \int_{\Omega} D(u_h^n) : D(v_h) \, dx \\ - \int_{\Omega} p_h^n \nabla \cdot v_h \, dx = \int_{\Omega} f^n \cdot v_h \, dx, \end{aligned} \quad (5a)$$

$$- \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot u_h^n \, dx = 0, \quad (5b)$$

$$\forall (v_h, q_h) \in W_h \times Q_h, \quad n = 1, \dots, N_T,$$

により $\{(u_h^n, p_h^n) \in W_h \times Q_h; n = 1, \dots, N_T\}$ を求める。スキーム (5) はLG法の出発点といえる。

注意1. スキーム (5) から導かれる連立一次方程式の係数行列をブロック表示すると

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & O \end{pmatrix}$$

の形となる。 A は $\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} u_h^n \cdot v_h dx + \int_{\Omega} D(u_h^n) : D(v_h) dx$ 、 B は $-\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot u_h^n dx$ に対応し、全体として対称行列である。

ノルム空間 $Y(=L^2(\Omega), H^1(\Omega))$ に対して、ノルム $\|\cdot\|_{L^\infty(0,T;Y)}$, $\|\cdot\|_{L^2(0,T;Y)}$ を時間のみ離散的にしたものをそれぞれ $\|\cdot\|_{\ell^\infty(Y)}$, $\|\cdot\|_{\ell^2(Y)}$ で表す。次の評価が成立する。

定理1 (スキーム (5), [12]). 問題 (4) の解は滑らかとする。 $u_h^0 \in W_h$ は u^0 の H_0^1 -射影とする。このとき、正定数 h_0 と c_0 が存在して、任意の $h \in (0, h_0]$, $\Delta t \leq c_0 h^{d/4}$ に対してスキーム (5) の安定な解が唯一存在して、評価式：

$$\|u_h - u\|_{\ell^\infty(H^1)}, \|p_h - p\|_{\ell^2(L^2)} = O(\Delta t + h^2) \quad (6a)$$

が成立する。さらに、Stokes問題が (H^2) -正則ならば、

$$\|u_h - u\|_{\ell^\infty(L^2)} = O(\Delta t + h^3) \quad (6b)$$

が成立する。

(5a) の左辺第1項を

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{2\Delta t} \{ & 3u_h^n - 4u_h^{n-1} \circ X_1(2u_h^{n-1} - u_h^{n-2}, \Delta t) \\ & + u_h^{n-2} \circ X_1(2u_h^{n-1} - u_h^{n-2}, 2\Delta t) \} \cdot v_h dx \end{aligned} \quad (7)$$

で置換すると、スキーム (5) は時間2次精度となる [2]。適切な初期および第1ステップの流速が与えられれば、定理1の誤差評価 (6a)、(6b) の右辺を、それぞれ $O(\Delta t^2 + h^2)$, $O(\Delta t^2 + h^3)$ とした評価が成立する [2] (後者の評価 $O(\Delta t^2 + h^3)$ は [2] には記されていないが証明可能)。同評価に必要な Δt と h の条件は $\Delta t \leq \tilde{c}_0 h^{d/6}$ の形に弱まる。

2.3 NS方程式のための安定化LG法

LG法と安定化法 [3] を組み合わせた安定化LG法 [4-6] を紹介する。 $K \in \mathcal{T}_h$ に対して $h_K \equiv \text{diam}(K)$ 、 δ_0 を正定数とする。 $u_h^0 \in V_h$ が与えられたとする。問題 (4) のためのP1/P1要素による安定化LGスキーム [5]：

$$\int_{\Omega} \frac{u_h^n - u_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1}, \Delta t)}{\Delta t} \cdot v_h dx + 2\nu \int_{\Omega} D(u_h^n) : D(v_h) dx - \int_{\Omega} p_h^n \nabla \cdot v_h dx = \int_{\Omega} f^n \cdot v_h dx, \quad (8a)$$

$$-\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot u_h^n dx - \delta_0 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \int_K \nabla p_h^n \cdot \nabla q_h dx = 0, \quad (8b)$$

$$\forall (v_h, q_h) \in V_h \times Q_h, \quad n = 1, \dots, N_T,$$

により $\{(u_h^n, p_h^n) \in V_h \times Q_h; n = 1, \dots, N_T\}$ を求める。

注意2. (i) (8b) 左辺第2項が (圧力) 安定化項 [3] である。(ii) P1/P1要素により自由度を小さくでき、特に3次元問題に有用である。(iii) スキーム (8) から導かれる行列は、

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{pmatrix}$$

の形となる。 C が安定化項に対応しており、対称なので、全体としても対称行列である。

定理2 (スキーム (8), [5]). 問題 (4) の解は滑らかとする。 $u_h^0 \in V_h$ は $(u^0, 0)$ の安定化Stokes射影の第1成分とする。このとき、正定数 h_1 と c_1 が存在して、任意の $h \in (0, h_1]$, $\Delta t \leq c_1 h^{d/4}$ に対してスキーム (8) の安定な解が唯一存在して、評価式：

$$\|u_h - u\|_{\ell^\infty(H^1)}, \|p_h - p\|_{\ell^2(L^2)} = O(\Delta t + h) \quad (9a)$$

が成立する。さらに、Stokes問題が (H^2) -正則ならば、

$$\|u_h - u\|_{\ell^\infty(L^2)} = O(\Delta t + h^2) \quad (9b)$$

が成立する。

スキーム (8) の時間2次精度化は、(8a) の左辺第1項を (7) で置換すればよい [6]。そのスキームについて、適切な条件の下で、定理2 (9a)、(9b) の右辺をそれぞれ $O(\Delta t^2 + h)$, $O(\Delta t^2 + h^2)$ とした評価が成立する [6]。同評価に必要な Δt と h の条件は $\Delta t \leq \tilde{c}_1 h^{d/6}$ の形となる。

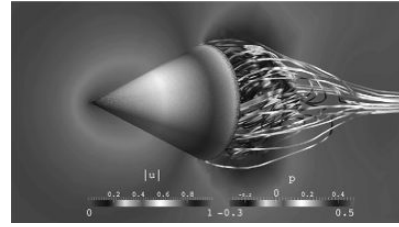


図1 スキーム (8) による円錐周りの流れの計算例、 $\nu = 10^{-3}$

2.4 自然対流問題

Boussinesq 方程式を含む、次の形の自然対流問題：

$$\frac{Du}{Dt} - \nabla \cdot [2\nu D(u)] + \nabla p = \tilde{f}(\theta), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (10a)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (10b)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} - \kappa \Delta \theta = \tilde{f}, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (10c)$$

$$u = \tilde{g}, \quad \theta = \tilde{g}, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T), \quad (10d)$$

$$u = u^0, \quad \theta = \theta^0, \quad x \in \Omega, t = 0, \quad (10e)$$

を満たす $(u, p, \theta) : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を求めよ、を考える。ここに u, p, θ は、それぞれ流速、圧力、温度を表し、 ν, κ は正定数である。 $\tilde{f}(\theta) : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ は θ に関して線形、すなわち、与えられた関数 $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ に対して、

$$\tilde{f}(\theta) \equiv \tilde{f}_0 + \tilde{f}_1 \theta$$

とする。 $\tilde{f} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $u^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\theta^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{g} : \Gamma \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\tilde{g} : \Gamma \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ は与えられた関数である。簡単のため、以下 $\tilde{g} = 0$, $\tilde{g} = 0$ とする。

2.5 自然対流問題のための安定化LG法

Ψ_h を温度のためのP1-有限要素空間とする。 u^0, θ^0 の近似 $u_h^0 \in V_h$, $\theta_h^0 \in \Psi_h$ が与えられたとする。問題 (10) のためのP1/P1/P1要素による安定化LGスキーム：

$$\int_{\Omega} \frac{u_h^n - u_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1}, \Delta t)}{\Delta t} \cdot v_h dx + 2\nu \int_{\Omega} D(u_h^n) : D(v_h) dx$$

$$-\int_{\Omega} p_h^n \nabla \cdot v_h dx = \int_{\Omega} \tilde{f}^n(\theta_h^{n-1}) \cdot v_h dx, \quad (11a)$$

$$-\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot u_h^n dx - \delta_0 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \int_K \nabla p_h^n \cdot \nabla q_h dx = 0, \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\theta_h^n - \theta_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1}, \Delta t)}{\Delta t} \psi_h dx + \kappa \int_{\Omega} \nabla \theta_h^n \cdot \nabla \psi_h dx \\ &= \int_{\Omega} \tilde{f}^n \psi_h dx, \end{aligned} \quad (11c)$$

$$\forall (v_h, q_h, \psi_h) \in V_h \times Q_h \times \Psi_h, \quad n = 1, \dots, N_T,$$

により $\{(u_h^n, p_h^n, \theta_h^n) \in V_h \times Q_h \times \Psi_h; n = 1, \dots, N_T\}$ を求める。

注意3. スキーム (11) は、(11a)、(11b) のNS型方程式と (11c) の移流拡散方程式を分離して解くことができる。その際に現れる行列はともに対称である。

定理3 (スキーム (11), [7]). 問題 (10) の解は滑らかとする。 $u_h^0 \in V_h$ と $\theta_h^0 \in \Psi_h$ は $(u^0, 0, \theta^0)$ の安定化Stokes-Poisson射影の第1、第3成分とする。このとき、正定数 h_2 と c_2 が存在して、任意の $h \in (0, h_2]$, $\Delta t \leq c_2 h^{d/4}$ に対してスキーム (11) の安定な解が唯一存在して、評価式：

$$\|u_h - u\|_{L^\infty(H^1)}, \|p_h - p\|_{L^2(L^2)}, \|\theta_h - \theta\|_{L^\infty(H^1)} = O(\Delta t + h)$$

が成立する。さらに、Stokes問題が (H^2) -正則ならば、

$$\|u_h - u\|_{L^\infty(L^2)}, \|\theta_h - \theta\|_{L^\infty(L^2)} = O(\Delta t + h^2)$$

が成立する。

3 LG法と数値積分

本節ではLG法の実装について考える。スキーム (5)、(8)、(11) などのLG法の計算を行うとき、合成関数の積分を効率よく行う必要がある。なぜなら、一般に最も計算負荷がかかるのは連立一次方程式の求解であるが、LG法では、係数行列の対称性によって連立一次方程式の求解時間を半減できる代わりに、合成関数の積分を含む右辺ベクトル作成には通常より時間を要すからである。また、精度の低い数値積分公式によって不安定な数値解が現れることがある^[13]ため、注意が必要である。具体的に以下では、(5)、(8)、(11) 第1式、第1項の計算に現れる、各三角形(四面体)要素 $K \in \mathcal{T}_h$ 上での合成関数の積分：

$$\int_K u_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1}, \Delta t) \cdot v_h dx \quad (12)$$

を考える。ここに $u_h^{n-1}, v_h \in V_h$ は既知関数である。

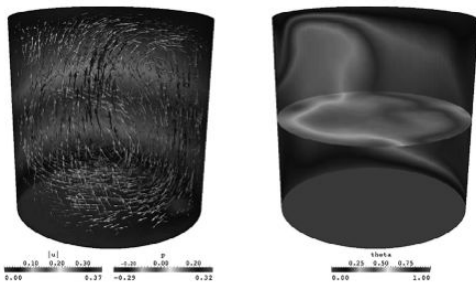


図2 スキーム (11) による自然対流の計算例、 $\nu = \kappa = 10^{-3}$

3.1 重心座標

数値積分により (12) の近似値を求める際に、重心座標の性質を利用すると効率的である。ここでは重心座標を復習する。 $\Lambda_d = \{1, \dots, d+1\}$ とする。 $\{P_i\}_{i \in \Lambda_d}$ を K の頂点の座標とする。重心座標を $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_{d+1}(x)) \in \mathbb{R}^{d+1}$ とする(図3参照)。 δ_{ij} をKroneckerのデルタとする。重心座標は (i) $\lambda_i(P_j) = \delta_{ij}$, $i, j \in \Lambda_d$, (ii) $\sum_{i \in \Lambda_d} \lambda_i(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}^d$, (iii) $\lambda_i(x) \geq 0$, $x \in K$, $i \in \Lambda_d$ を満たす。重要なのは (iii) である。(12) の数値積分では、ある $x_* \in \bar{\Omega}$ が与えられたときに x_* を含む要素(番号)を探す、という作業を行う。(iii) により x_* が K の内部かどうかかわかり、また x_* が K の外部のときには、 λ_i の符号により x_* の方向がわかる(図3参照)。

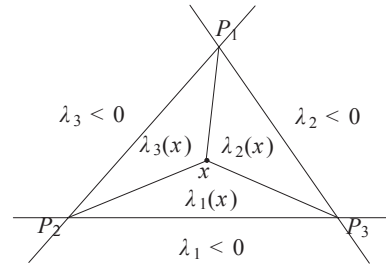


図3 重心座標 ($d = 2$)

3.2 数値積分公式

要素 K 上での関数 $\phi: K \rightarrow \mathbb{R}$ の積分 $I[\phi, K] \equiv \int_K \phi dx$ を、数値積分 $I_h[\phi, K]$ により近似計算する：

$$I[\phi, K] \approx I_h[\phi, K] \equiv \text{meas}(K) \sum_{i=1}^N \phi(a_i) w_i. \quad (13)$$

ここに、 $\text{meas}(K) \equiv \int_K dx$, N は積分点の個数、 $a_i \in K$, $w_i \in \mathbb{R}$ はそれぞれ、積分点と重みである。(13) の N , a_i , w_i の一例として2次公式 ($N = d+1$) を挙げておく。

2次公式 ($d = 2, 3$) :

$$\begin{cases} N \equiv d+1, & w_i \equiv 1/(d+1) \quad (i \in \Lambda_d), \\ p \equiv \frac{d+2+\sqrt{d+2}}{(d+1)(d+2)}, & q \equiv \frac{d+2+\sqrt{d+2}}{(d+1)(d+2)}, \\ \{a_i\}_{i \in \Lambda_d} : \lambda(a_i) \in (p, \dots, p; q) \quad (a_i \neq a_j, i \neq j). \end{cases}$$

ここに、 a_i の位置は重心座標で示した。 $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ($i \in \Lambda_d$) に対して $(\alpha_1, \dots, \alpha_d; \alpha_{d+1})$ は $(\alpha_1, \dots, \alpha_{d+1})$ の順列の集合である。5次公式 ($d = 2 : N = 7$, $d = 3 : N = 15$) などの他の公式は^[11]を参照されたい。

3.3 要素探索アルゴリズム

(12) を数値積分する場合、(13) において $\phi = u_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1}, \Delta t) \cdot v_h$ となる。 $a \in \{a_i\}_{i=1}^N$ に対して、

$$\phi(a) = (u_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1}, \Delta t))(a) \cdot v_h(a)$$

を計算する。 $v_h(a)$ の値は $a \in K$ なので、 $v_h(a) = v_h|_K(a)$ により計算できる。 $(u_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1}, \Delta t))(a)$ の値は、

- (i) $\tilde{a} \equiv X_1(u_h^{n-1}, \Delta t)(a) \in K_{\ell_*}$ なる要素番号 ℓ_* を求め、
- (ii) $u_h^{n-1}(\tilde{a}) = u_h^{n-1}|_{K_{\ell_*}}(\tilde{a})$ により計算する、

という手続きを踏む。LG法に特有な作業は (i) であ

る。次の処理を行うサブルーチン(関数)を用意するとよい。

$$\begin{aligned} & \text{Input: } x_* \in \bar{\Omega}, \mathcal{T}_h = \{K_\ell\}_{\ell=1}^{N_e} \text{ (メッシュ情報).} \\ & \text{Output: } x_* \in K_{\ell_*} \text{ なる要素番号 } \ell_* \in \{1, \dots, N_e\}. \end{aligned} \quad (14)$$

読者の中には(14)のサブルーチンをすでに利用している人もいるのではないだろうか。ただし、毎回すべての要素をチェックするのでは計算時間の増大を招くため工夫が必要である。例えば、図4のように目標要素 K_{ℓ_*} に近づく要素探索アルゴリズムで ℓ_* を求めるとよい(著者も同様なアルゴリズムを用いている)。その際には $\lambda_i (i \in \Lambda_d)$ の符号を利用すると良い(3.1参照)。積分点の数が多いとそれに応じた計算時間を要すが、実計算では、最初の積分点について要素探索をおこなえば、残りは同じまたは隣の要素である。

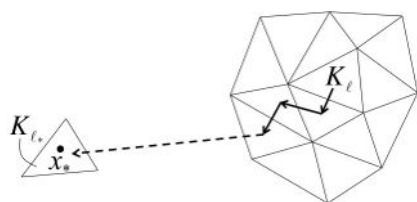


図4 要素探索アルゴリズムのイメージ

4 結び

LG法について最近の著者の結果を中心に紹介した。他にもLG法の興味深い結果がある。例えば、射影LG法^[1]、集中質量近似^[9]や厳密な積分^[14]による数値積分の回避、質量保存型スキーム^[10]などである。いずれも詳細については文献を参照されたい。

謝辞：本研究は、日本学術振興会科学研究費補助金若手研究(B)、No. 26800091、基盤研究(S)、No. 24224004、日独共同大学院プログラム(流体数学)の支援を受けた。

■参考文献

[1] Y. Achdou and J.-L. Guermond, Convergence analysis of a

finite element projection/Lagrange-Galerkin method for the incompressible Navier-Stokes equations, *SINUM*, **37** (2000), 799-826.

- [2] K. Boukir et al., A high-order characteristics/finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations, *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, **25** (1997), 1421-1454.
- [3] F. Brezzi and J. Pitkäranta, On the stabilization of finite element approximations of the Stokes equations, In W. Hackbusch ed., *Efficient solutions of Elliptic Systems*, Vieweg (1984), 11-19.
- [4] H. Notsu and M. Tabata, Error estimates of a pressure-stabilized characteristics finite element scheme for the Oseen equations, *J. Sci. Comput.*, Published online (2015).
- [5] H. Notsu and M. Tabata, Error estimates of a stabilized Lagrange-Galerkin scheme for the Navier-Stokes equations, To appear in *ESAIM:M2AN*.
- [6] H. Notsu and M. Tabata, Error estimates of a stabilized Lagrange-Galerkin scheme of second-order in time for the Navier-Stokes equations, Submitted.
- [7] 野津裕史、田端正久、自然対流問題のためのGalerkin特性曲線有限要素法の誤差評価、2015年度日本数学会年会応用数学分科会講演アブストラクト、129-131.
- [8] O. Pironneau, On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations, *Numer. Math.*, **38** (1982), 309-332.
- [9] O. Pironneau and M. Tabata, Stability and convergence of a Galerkin-characteristics finite element scheme of lumped mass type, *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, **64** (2010), 1240-1253.
- [10] H. Rui and M. Tabata, A mass-conservative characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems, *J. Sci. Comput.*, **43** (2010), 416-432.
- [11] A.H. Stroud, *Approximate calculation of multiple integrals*, Prentice-Hall (1971).
- [12] E. Süli, Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations, *Numer. Math.*, **53** (1988), 459-483.
- [13] M. Tabata, Discrepancy between theory and real computation on the stability of some finite element schemes, *J. Comput. Appl. Math.*, **199** (2007), 424-431.
- [14] M. Tabata and S. Uchiumi, A Lagrange-Galerkin scheme with a locally linearized velocity for the Navier-Stokes equations, arXiv:1505.06681 [math.NA].

参考図書

● Finite Element Methods for Fluids

O. Pironneau

John Wiley & Sons (1989)

世界的な有限要素法の専門家による著書。

LG法の先駆的な仕事^[10]の著者であり、LG法についても記されている。著者はFEMフリーソフトウェアFreeFemの創始者でもある。